Fonction caractéristique et moments

Théorème : Soit X une variable aléatoire réelle. On note φ_X sa fonction caractéristique.

① Si X admet un moment d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$, φ_X est $\mathcal{C}^n$ et pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on a, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\varphi_X^{(k)}(t) = i^k \int_\Omega X^k \exp(itX)\, d\mathbb{P}$. En particulier, $\varphi_X^{(k)}(0) = i^k \mathbb{E}[X^k]$.

② Si φ_X est k-fois dérivable en 0, avec $k \geqslant 2$, X admet des moments jusqu'à l'ordre $2\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor$, donnés par $\mathbb{E}[X^j] = (-1)^j \varphi_X^{(j)}(0)$.

Démonstration :

① Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on a $\frac{d^k}{dt^k}\exp(itX) = (iX)^k \exp(itX)$, donc $\left|\frac{d^k}{dt^k}\exp(itX)\right| \leqslant |X|^k$, et $|X|^k$ est intégrable, car X admet un moment d'ordre n, donc admet un moment d'ordre k pour tout $k \in [\![1,n]\!]$. Le théorème de dérivation sous l'intégrale appliqué n fois donne φ_X de classe $\mathcal{C}^n$ et, pour tous $k \in [\![1,n]\!]$ et $t \in \mathbb{R}$, $\varphi_X^{(k)}(t) = i^k \int_\Omega X^k \exp(itX)\, d\mathbb{P}$.

En évaluant en $t = 0$, on trouve $\varphi_X^{(k)}(0) = i^k \int_\Omega X^k\, d\mathbb{P} = i^k \mathbb{E}[X^k]$.

② On commence par prouver le résultat pour $k = 2$.

Par Taylor-Young, on a
$$\varphi_X(t) = \underbrace{\varphi_X(0)}_{=1} + t\varphi_X'(0) + \frac{t^2}{2}\varphi_X''(0) + o(t^2),$$
$$\varphi_X(-t) = \varphi_X(0) - t\varphi_X'(0) + \frac{t^2}{2}\varphi_X''(0) + o(t^2)$$

donc $\varphi_X(t) + \varphi_X(-t) - 2 = t^2\varphi_X''(0) + o(t^2)$, ce qui donne $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\varphi_X(t) + \varphi_X(-t) - 2}{t^2} = \varphi_X''(0)$.

De plus, $\varphi_X(t) + \varphi_X(-t) = 2\,\mathrm{Re}(\varphi_X(t)) = 2\mathbb{E}[\cos(tX)]$, donc $\lim\limits_{t\to 0} \mathbb{E}\left[\frac{1-\cos(tX)}{t^2}\right] = -\frac{1}{2}\varphi_X''(0)$.

Soit $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergeant vers 0.

On a
$$\int_\Omega X^2\, d\mathbb{P} = \mathbb{E}\left[2\liminf_{n\to+\infty} \frac{1-\cos(t_nX)}{t_n^2}\right]$$
$$\leqslant 2\liminf_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left[\frac{1-\cos(t_nX)}{t_n^2}\right] \quad \text{par Fatou}$$
$$\leqslant -\varphi_X''(0) < +\infty$$

On suppose à présent avoir montré l'existence de tous les moments jusqu'à l'ordre $2(m-1) = 2\lfloor \frac{k}{2} \rfloor - 2$.
On va montrer que le moment d'ordre $2m = 2\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ existe.

On rappelle que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\varphi_X(t) + \varphi_X(-t) = 2\,\mathbb{E}[\cos(tX)]$.
On a alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi_X^{2(m-1)}(t) + \varphi_X^{2(m-1)}(-t) = (-1)^{m-1} \times 2\,\mathbb{E}[X^{2(m-1)} \cos(tX)]$.

En particulier, on a $\varphi_X^{2(m-1)}(0) = (-1)^{m-1}\,\mathbb{E}[X^{2(m-1)}]$.

Par hypothèse, $\varphi_X^{2(m-1)}$ est deux fois dérivable en 0, donc, par Taylor-Young :

$$\varphi_X^{2(m-1)}(t) = \varphi_X^{2(m-1)}(0) + t\,\varphi_X^{2m-1}(0) + \frac{t^2}{2}\varphi_X^{2m}(0) + o(t^2)$$

$$\varphi_X^{2(m-1)}(-t) = \varphi_X^{2(m-1)}(0) - t\,\varphi_X^{2m-1}(0) + \frac{t^2}{2}\varphi_X^{2m}(0) + o(t^2)$$

d'où $\varphi_X^{2(m-1)}(t) + \varphi_X^{2(m-1)}(-t) - 2\varphi_X^{2(m-1)}(0) = t^2\varphi_X^{2m}(0) + o(t^2)$,

ce qui donne $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\varphi_X^{2(m-1)}(t) + \varphi_X^{2(m-1)}(-t) - 2\varphi_X^{2(m-1)}(0)}{t^2} = \varphi_X^{2m}(0)$,

d'où

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0} \mathbb{E}\left[X^{2(m-1)}\frac{1-\cos(tX)}{t^2}\right] &= \lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{t^2}\mathbb{E}[X^{2(m-1)}] - \frac{1}{t^2}\mathbb{E}[X^{2(m-1)}\cos(tX)]\right) \\ &= \lim_{t\to 0}\left(\frac{(-i)^{2(m-1)}\varphi_X^{2(m-1)}(0)}{t^2} + \frac{(-1)^m}{2}\left(\varphi_X^{2(m-1)}(t) + \varphi_X^{2(m-1)}(-t)\right)\right) \\ &= \lim_{t\to 0}\left(\frac{(-1)^m}{2}\cdot\frac{\varphi_X^{2(m-1)}(t) + \varphi_X^{2(m-1)}(-t) - 2\varphi_X^{2(m-1)}(0)}{t^2}\right) \\ &= \frac{(-1)^m}{2}\varphi_X^{2m}(0)\end{aligned}$$

On a donc $\displaystyle\int_\Omega X^{2m}\,dP = \mathbb{E}\left[2X^{2(m-1)}\liminf_{m\to+\infty}\frac{1-\cos(t_mX)}{t_m^2}\right]$ où $(t_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels convergeant vers 0

$$\leqslant 2\liminf_{m\to+\infty}\mathbb{E}\left[X^{2(m-1)}\cdot\frac{1-\cos(t_mX)}{t_m^2}\right] \quad \text{par Fatou}$$

$$\leqslant (-1)^m\varphi_X^{2m}(0) < +\infty$$

donc X admet un moment d'ordre $2m$.